Ganzrationale Funktionen • Symmetrie von Funktionsgraphen
Übung

1. Überprüfen Sie die folgenden ganzrationalen Funktionen auf Symmetrie und geben Sie ggf. die Art der Symmetrie an! Die Definitionsmenge D_f ist jeweils $\mathbb{R}$.

   a) $f_1(x) = x^5 + 7x^3 + 2x$

   b) $f_2(x) = \frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{5}$

   c) $f_3(x) = x + 0{,}73x^3 + 1{,}537x^9$

   d) $f_4(x) = x^3 + 2x^2 + 3x$

2. Begründen Sie, dass die gegebenen Funktionen keine Symmetrie zum Koordinatensystem besitzen.

   a) $f(x) = x^3 - 4x^2$ in der Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$

   b) $f(x) = x^5 + 5$ in der Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$

   c) $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - 3x^2 + 2$ in der Definitionsmenge $D = [-2; 3]$

3. Eine Funktion $f(x)$wird durch $f(x-a) + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ um a in (positive) x-Richtung und um b in y-Richtung verschoben. Zeigen Sie damit, dass die folgenden Funktionen die angegebene Symmetrie besitzen.

   a) $f(x) = (x-3)(x^2 - 6x + 8) + 4$ ist punktsymmetrisch zu $P(3; 4)$.

   b) $f(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 4x + 4)^2 + 6x^2 + 24x + 19$ ist achsensymmetrisch zur Senkrechten bei $x = -2$.

Ganzrationale Funktionen • Symmetrie von Funktionsgraphen
Lösung

1.
   a) Punktsymmetrie zum Ursprung
   b) Achsensymmetrie zur y-Achse
   c) Punktsymmetrie zum Ursprung
   d) Keine Symmetrie

2.
   a) Der Funktionsterm besitzt sowohl ungerade, als auch gerade Exponenten.

   b) Die 5 am Ende des Terms bewirkt eine Verschiebung um 5 nach oben im Koordinatensystem, daher liegt keine Punktsymmetrie zum Ursprung vor.

   c) Der zugehörige Graph ist lediglich aufgrund der Definitionsmenge nicht symmetrisch.

3.
   a) Die Funktion muss um 3 in negative x-Richtung und um 4 in negative y-Richtung verschoben werden. Die sich ergebende Funktion muss dann punksymmetrisch zum Koordinatenursprung sein.

   $$f(x+3)-4=\big((x+3)-3\big)\big((x+3)^2-6(x+3)+8\big)+4-4$$
   $$=(x+3-3)(x^2+6x+9-6x-18+8)$$
   $$=x(x^2-1)$$
   $$=x^3-x.$$

   Die verschobene Funktion ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, da sie nur ungerade Exponenten besitzt. Die ursprüngliche Funktion muss daher punksymmetrisch zu $P(3;4)$ sein.

   b) Der Funktionsgraph muss um 2 nach rechts verschoben werden und sollte dann achsensymmetrisch zur y-Achse sein.

   $$f(x-2)=\frac{1}{4}\big((x-2)^2+4(x-2)+4\big)^2+6(x-2)^2+24(x-2)+19$$
   $$=\frac{1}{4}(x^2-4x+4+4x-8+4)^2+6(x^2-4x+4)+24x-48+19$$
   $$=\frac{1}{4}(x^2)^2+6x^2-24x+24+24x-29$$
   $$=\frac{1}{4}x^4+6x^2-5.$$

   Der verschobene Graph ist offenbar achsensymmetrisch zur y-Achse und der ursprüngliche damit zur Geraden $x=-2$.